Άσκηση 49

8€ στην τσέπη

20€ φεύγει

P(να κερδίσει) = 0.6

X_n η σ.δ. που παριστάνει το κέρδος του την χρονική στιγμή n

$X_0 = 0$

Είναι ΑΤΠ, καθώς η i-οστή μετατόπιση

Έστω Y_i η τ.μ. που παριστάνει

$$P(Y_i = y) = \begin{cases} 0.6 & , y = 1 \\ 0.4 & , y = -1 \end{cases}$$

2 φράγματα απορόφησης στο $\underset{-b}{\overset{\shortparallel}{-8}}$ και το $\underset{a}{\overset{\shortparallel}{12}}$

(i) Να βρεθεί η πιθανότητα να πετύχει το σκοπό του δηλ. να τα κάνει 20€

(ii) ~~[illegible]~~ ET = ;

Λύση

P(τελ απορ) = 1

$\mu = EY = 0.6 \cdot 1 + 0.4(-1) = 0.2 \neq 0$

$g(s_0)=1 \Rightarrow E(e^{s_0})=1 \Rightarrow e^{s_0\cdot 1}p + e^{s_0(-1)}\cdot q = 1 \Rightarrow pe^{s_0}+qe^{-s_0}=1 \Rightarrow$

$p(e^{s_0})^2 + q = 0 \xrightarrow{e^{s_0}=\lambda} p\lambda^2+q=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow q/p \end{cases}$ αυτήν κρατάω

$s_0 = \ln \frac{q}{p}$

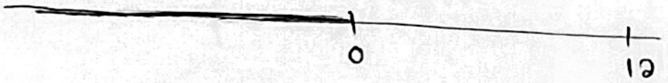
$\exists\, s_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε $g(s_0)=1$

Κάνω την ταυτότητα WALD

$ET = \frac{EX_r}{\mu} = \frac{aP(\text{τελ. απορ. στο } a) - bP(\text{τελ. απορ. στο } -b)}{p-q}$

σ' αυτή την άσκηση $\mu = p-q$

Αν ο παίκτης είχε αρχικά απεριόριστο κεφάλαιο, ποια η πιθανότητα να τελειώσει το παιχνίδι;

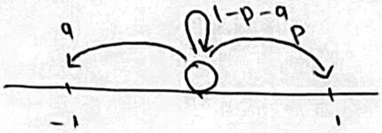


1 φράγμα απορρόφησης, το $a=12$

$P(\text{να τελειώσει το παιχνίδι}) = \lim_{b\to\infty} P\begin{pmatrix}\text{τελ. απορ. στο } a \text{ όταν} \\ \text{έχω δύο φραγμ. απορ.}\end{pmatrix} = 1$

$s_0 = \ln \frac{q}{p} = \ln \frac{0.4}{0.6} < 0$

• Ποια η πιθανότητα να έχει 0€ για πρώτη φορά, σε οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή;



$$P\left(\begin{array}{l}\text{να έχει 0€ οποιαδήποτε} \\ \text{μελλοντική στιγμή}\end{array}\right) = (1-p-q) + pP\left(\begin{array}{l}\text{να τελειώσει το παιχνίδι γιατί} \\ \text{θα επιστρέψω στο 0€ ενώ είμαι στο 1}\end{array}\right)$$

$$P\left(\begin{array}{l}\text{να έχει 0€ οποιαδή-} \\ \text{ποτε μελλοντική στιγμή}\end{array}\right) = (1-p-q) + qP\left(\begin{array}{l}\text{να τελειώσει το παιχνίδι γιατί θα} \\ \text{επιστρέψω στο 0€ ενώ είμαι στο -1€}\end{array}\right)$$

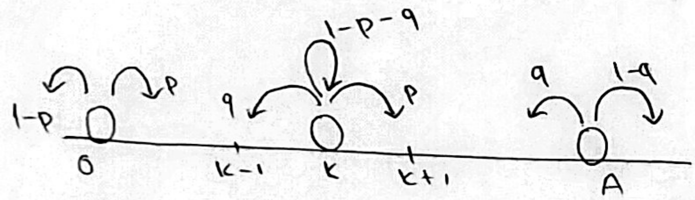
$$P\left(\begin{array}{l}\text{να έχει 0€ κέρδος οποιαδή-} \\ \text{ποτε μελλοντική στιγμή}\end{array}\right) = (1-p-q) + pP\left(\begin{array}{l}\text{φράγμα απορ.} \\ \text{στο -1}\end{array} \middle| \begin{array}{l}\text{είμαι} \\ \text{στο 0}\end{array}\right)$$

$$P\left(\begin{array}{l}\text{να έχει 0€ κέρδος οποιαδή-} \\ \text{ποτε μελλοντική στιγμή}\end{array}\right) = (1-p-q) + qP\left(\begin{array}{l}\text{φράγμα απορ.} \\ \text{στο 1}\end{array} \middle| \begin{array}{l}\text{είμαι} \\ \text{στο 0}\end{array}\right)$$

$$P = \begin{cases} (1-p-q) + p\left(\dfrac{q}{p}\right)^{1(=1)} + q\cdot 1 &, S_0 < 0 \\ (1-p-q) + p\cdot 1 + q\cdot 1 &, S_0 = 0 \\ (1-p-q) + p\cdot 1 + q\left(\dfrac{p}{q}\right)^{1} &, S_0 > 0 \end{cases}$$

← αυτό θέλουμε σ' αυτή την άσκηση

ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΑΚΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΤΠ ΜΕ ΔΥΟ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ ΣΤΟ 0 ΚΑΙ ΣΤΟ A



X_n: σ.δ. που περιγράφει την κίνηση στον ΑΤΠ με 2 φρ. απ.

Πρόκειται για σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο $S=\{0,1,\dots,a\}$

Έχει την μαρκοβιανή ιδιότητα.

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ a-1 \\ a \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & & a-1 & a \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1-p & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ & \dots & & & q & 1-p-q & p \\ & \dots & & & & q & 1-q \end{array}\right]\end{array}$$

Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, άρα είναι μη διαχωρίσιμη Μ.Α με πεπερ. πλήθος καταστάσεων

$\Downarrow$

ΘΕΤΙΚΩΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (2)

(1)

Επιπλέον, είναι απεριοδική, διότι $d_0=1$

(1) + (2) $\Longrightarrow$ ΕΡΓΟΔΙΚΗ $\Rightarrow$ FOSTER

$\Pi=(\Pi_0,\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_a)$, με $\sum_{i=1}^{a}\Pi_i=1$, τέτοιο ώστε $\Pi=\Pi P$

$$\Rightarrow \Pi_0=\Pi_0(1-p)+q\Pi_1$$
$$\Pi_1=\Pi_0\cdot p+\Pi_1(1-p-q)+\Pi_2 q$$
$$\Pi_2=\Pi_1\cdot p+\Pi_2(1-p-q)+\Pi_3 q$$
$$\vdots$$
$$\Pi_{a-1}=\Pi_{a-2}\cdot p+\Pi_{a-1}(1-p-q)+\Pi_a q$$
$$\Pi_a=\Pi_{a-1}\cdot p+\Pi_a\cdot(1-q)$$

πολ/ζω το κάθε διάνυσμα με κάθε στήλη

1ος ΤΡΟΠΟΣ $\rightarrow$ $\pi_0 = \pi_0(1-p) + q\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_0 p - \pi_1 q = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{p}{q}\pi_0$

$\pi_1 = \pi_0 p + \pi_1(1-p-q) + \pi_2 q = 0 \Rightarrow \pi_1 = \pi_1 q + \pi_1(1-p-q) + \pi_2 \cdot q = 0 \Rightarrow$

$\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1 \Rightarrow \pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_0$

Όμοια, $\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \cdot \pi_0$

$$\sum_{i=0}^{a} \pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 \dfrac{(p/q)^{a+1} - 1}{p/q - 1} = 1, & p \neq q \\ \pi_0 (a+1) = 1, & p = q \end{cases}$$

Άρα, $\pi_0 = \begin{cases} \dfrac{p/q - 1}{(p/q)^{a+1} - 1}, & p \neq q \\ \dfrac{1}{a+1}, & p = q \end{cases}$

2ος ΤΡΟΠΟΣ $\rightarrow$ Ορίζω το $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{a} \pi_i x^i$

$\Pi(x) = p(x^1\pi_0 + x^2\pi_1 + \ldots + x^a \pi_{a-1}) + (1-p-q)(x^1\pi_1 + x^2\pi_2 + \ldots + x^{a-1}\pi_{a-1}) +$
$+ q(x^0\pi_1 + x^1\pi_2 + \ldots + x^{a-1}\pi_a) + \pi_0(1-p) + x^a\pi_a(1-q)$

- $p(x^1\pi_0 + x^2\pi_1 + \ldots + x^a\pi_{a-1}) = px(\pi_0 + x^1\pi_1 + \ldots + x^{a-1}\pi_{a-1}) = \Pi(x) - x^a\pi_a$

- $q(x^0\pi_1 + x^1\pi_2 + \ldots + x^{a-1}\pi_a) = \frac{q}{x}(x^1\pi_1 + x^2\pi_2 + \ldots + x^a\pi_a) = \Pi(x) - \pi_0$

- $(1-p-q)(x^1\pi_1 + x^2\pi_2 + \ldots + x^{a-1}\pi_{a-1}) = \Pi(x) - \pi_0 - x^a\pi_a$

$\Rightarrow \Pi(x) = px(\Pi(x) - x^a\pi_a) + \frac{q}{x}(\Pi(x) - \pi_0) + (1-p-q)(\Pi(x) - \pi_0 - x^a\pi_a) + \pi_0(1-p) + x^a\pi_a(1-q) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\Pi(x)\left[px + \frac{q}{x} - (p+q)\right] = -px^{a+1}\pi_a - \frac{q}{x}\pi_0 + \frac{q}{\pi_0} + px^a\pi_a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Pi(x)\left[px^2-(p+q)x+q\right]=(p\,x^{a+1}\Pi_a-q\Pi_0)(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi(x)=\frac{(px^{a+1}\Pi_a-q\Pi_0)(x-1)}{px^2-(p+q)x+q}$$

<u>Ρίζες του παρονομαστή:</u> $x_1=1 \quad x_2=q/p$

$$\Pi(x)=\frac{(p\,x^{a+1}\Pi_a-q\Pi_0)\cancel{(x-1)}}{p\cancel{(x-1)}(x-q/p)}=\frac{p\,x^{a+1}\Pi_a-q\Pi_0}{p(x-q/p)}$$

Πρέπει το q/p να είναι ρίζα του αριθμητή, δηλαδή:

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}\Pi_a-q\Pi_0=0\Rightarrow \Pi_a=\left(\frac{p}{q}\right)^a\Pi_0$$

Άρα, $$\Pi(x)=\frac{px^{a+1}\frac{p^a}{q^a}\Pi_0-q\Pi_0}{p\left(x-\frac{q}{p}\right)}=\frac{\Pi_0\left(\frac{p^{a+1}}{q^a}x^{a+1}-q\right)}{px-q}=$$

βγάλαμε κοινό παρα
το q για να δημιου
γεωμετρική προσο

$$=\frac{\Pi_0\cdot\cancel{q}\left(\frac{p^{a+1}}{q^{a+1}}x^{a+1}-1\right)}{\cancel{q}\left(\frac{p}{q}x-1\right)}=\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}x\right)^i\Pi_0$$

$$\Longrightarrow \Pi(x)=\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0x^i\Rightarrow\boxed{\Pi_i=\left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0}$$

Από 'δω και πέρα, $\Sigma\Pi_i=1$, ... όπως πριν

Έχουν γίνει οι ασκήσεις:

4, 5, 6, 7

ΑΣΚΗΣΗ 9

	0	
3		1
	2	

Βήμα δεξιά: p

Βήμα αριστερά: q

Χn η θέση του σωματιδίου μετά από n βήματα

- Να προσδιοριστεί ο P.
- Ποια η πιθανότητα την n=2 να βρίσκεται στην θέση 3, αν αρχικά μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε με την ίδια πιθανότητα;

Λυση

$$p^{(0)} = \left(p_0^{(0)} \quad p_1^{(0)} \quad p_2^{(0)} \quad p_3^{(0)}\right) = \left(\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4}\right)$$

-
$$P \quad \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & p & 0 & q \\ 1 & q & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & q & 0 & p \\ 3 & p & 0 & q & 0 \end{array}$$

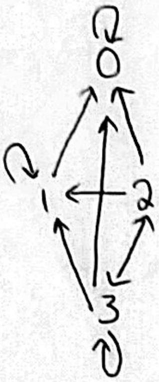
- Ψάχνω την $P(X_2=3) = p_3^{(2)}$

Αρχικά, πρέπει νδο $p^{(n)} = p^{(0)} P^n$

$$p^{(n)} = \left(p_0^{(n)} \quad p_1^{(n)} \quad p_2^{(n)} \quad p_3^{(n)}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

(α)
$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 3 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$



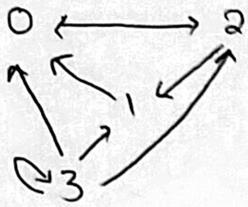
Η 0 είναι αποροφητική

$\left.\begin{array}{l} 1 \to 0 \\ 0 \not\to 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Η 1 είναι παροδική.

Ομοίως, οι 2,3 είναι παροδικές

(β)
$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

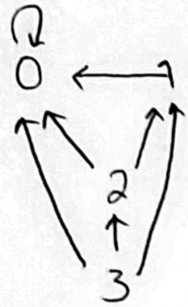
υποπίνακας
αφού η στήλη απ' έξω είναι 0, άρα είναι κλειστό κύκλωμα των 0, 1, 2.



Οι 0, 1, 2 αποτελούν κλειστό κύκλωμα πεπερασμένων καταστάσεων, άρα είναι θετικώς επαναληπτικές

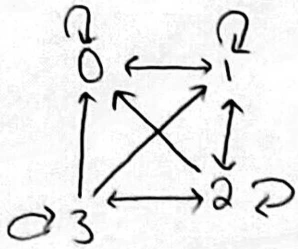
$\left.\begin{array}{l} 3 \to 0 \\ 0 \not\to 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Η 0 είναι παροδική

(γ)
$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$



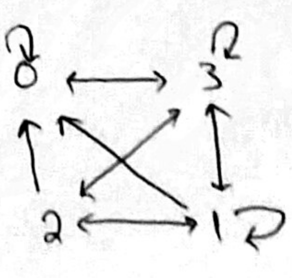
Όλες είναι παροδικές

(δ)
$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

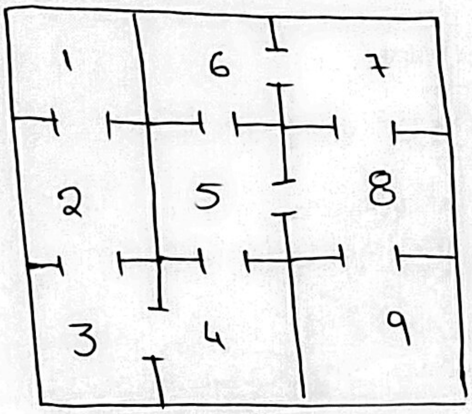


Κλειστό κύκλωμα πεπερ. καταστ., άρα όλες θετ. επαναλ

(ε)
$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1 & 2/16 & 4/16 & 4/16 & 6/16 \\ 2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/8 & 3/8 & 1/8 & 2/8 \end{array}$$



ΑΣΚΗΣΗ 10



$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ψάχνω την $P^{(3)}_{65}$

$$p^{(4)} = p^{(0)} \cdot p^{4}$$

$$P^{(3)}_{65} = P\left(6 \begin{array}{l} \nearrow 5 \xrightarrow{\text{σε δύο βήματα}} 5 \\ \searrow 7 \xrightarrow[\text{σε δύο βήματα}]{} 5 \end{array}\right) = \frac{1}{2} P^{(2)}_{55} + \frac{1}{2} P^{(2)}_{75}$$

$$P^{(2)}_{55} = P\left(5 \begin{array}{l} \nearrow 4 \longrightarrow 5 \\ \rightarrow 6 \longrightarrow 5 \\ \searrow 8 \longrightarrow 5 \end{array}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{2}{6} + \frac{1}{9}$$

$$P^{(2)}_{75} = P\left(7 \begin{array}{l} \nearrow 6 \longrightarrow 5 \\ \searrow 8 \longrightarrow 5 \end{array}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$